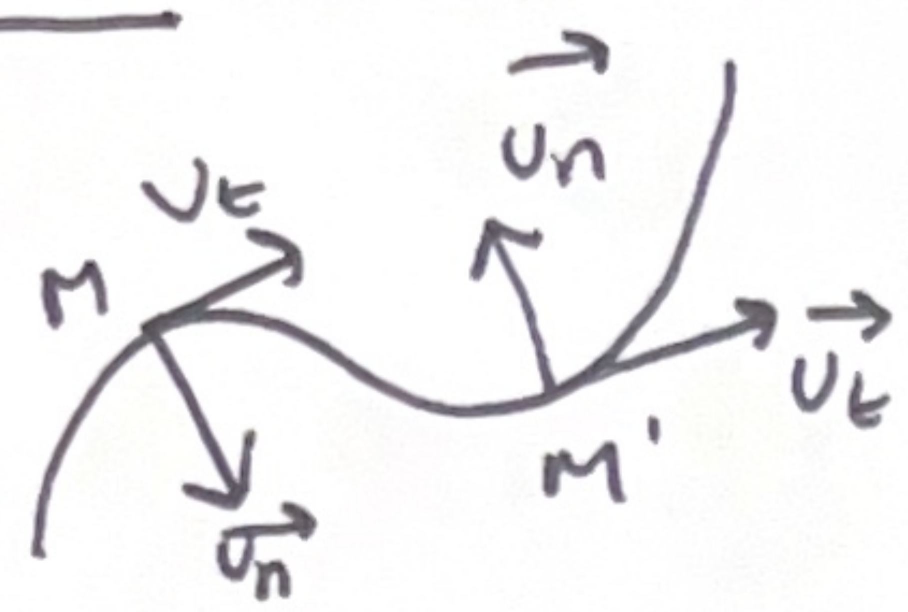
Frenet



s : abcisse curviligne de M

$$\frac{d\vec{u_t}}{ds} = \frac{\vec{u_n}}{R}$$

<u>accélération</u> $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + \frac{v^2}{R}\vec{u_n}$

<u>mvt circulaire uniforme :</u> $\dot{\theta} = \omega$

$v = R\omega$

<u>Newton 1</u> $\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_R = \vec{0}$

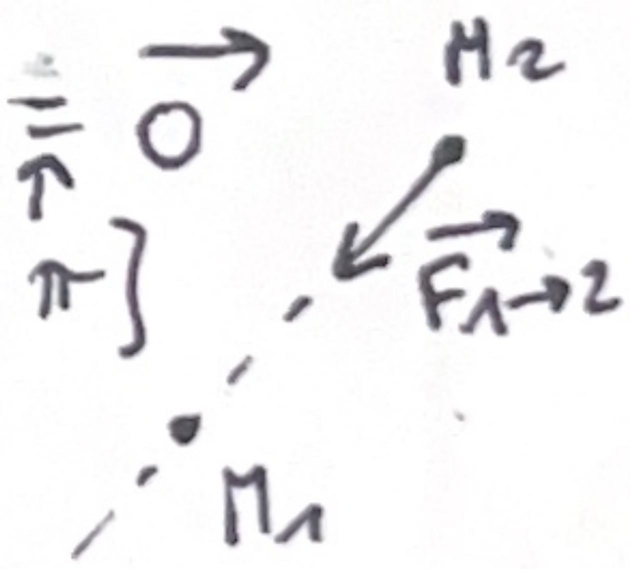
q de mouvement

$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

<u>Newton 2</u> <u>PFD</u> $\left(\frac{dp_{M/R}}{dt}\right)_R = \vec{F}_{ext\to M}$

<u>Newton 3</u> actions réciproques $\vec{M_1M_2} \wedge \vec{F_{1\to2}} = \vec{0}$

$[(M_1M_2, F_{1\to2}) = \pi]$



<u>Produit vectoriel</u> $\vec{P} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$

$\|\vec{P}\| = V_1 V_2 \sin\alpha$

$$V_1 \wedge V_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 y_2 \end{pmatrix}$$

V_1 et V_2
exprimés dans
(i, j, k) base orth. <u>directe</u>

$\vec{i} \to \vec{j} \to \vec{k}$

Travail

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt$$

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \delta W$$

Puissance

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{\delta W}{dt}$$

Ec

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{F_{ext \to M}}) \Rightarrow dE_c = \delta W$$

et donc $\Delta E_c = W_{M_1 \to M_2}(F_{ext})$

Ep

force conservite = dérive d'une Ep

$$\boxed{F = -\vec{grad}\, E_p} \Rightarrow \delta W = -dE_p$$

$$\Rightarrow \Delta E_p = -\int \delta W = -W$$

Em

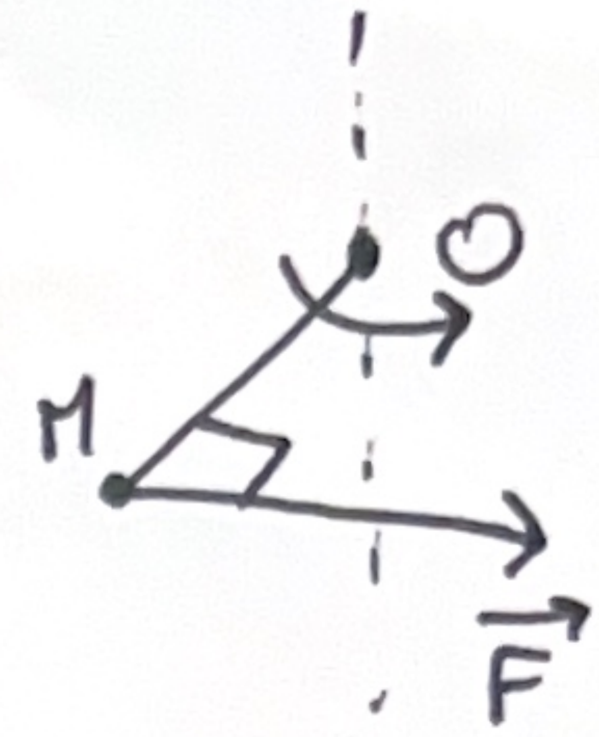
$$E_m = E_c + E_p$$

(loi de conservation): $\Delta E_m = 0$

(non conservation de l'Em): $\Delta E_m = \int \delta W_{NC}$

$$\Leftrightarrow dE_m = \delta W_{NC}$$

• Moment au point O de $\vec{F}$ appliqué en M



$$\vec{M_O}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

• Moment cinétique

$$\sigma_{O/R}(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p_{M/R}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v_{M/R}}$$

T.M.C. $\left(\dfrac{d\sigma_{O/R_g}(M)}{dt}\right)_{R_g} = \vec{M_O}(\vec{f_{ext}})$

=> dans un ref non galiléen :

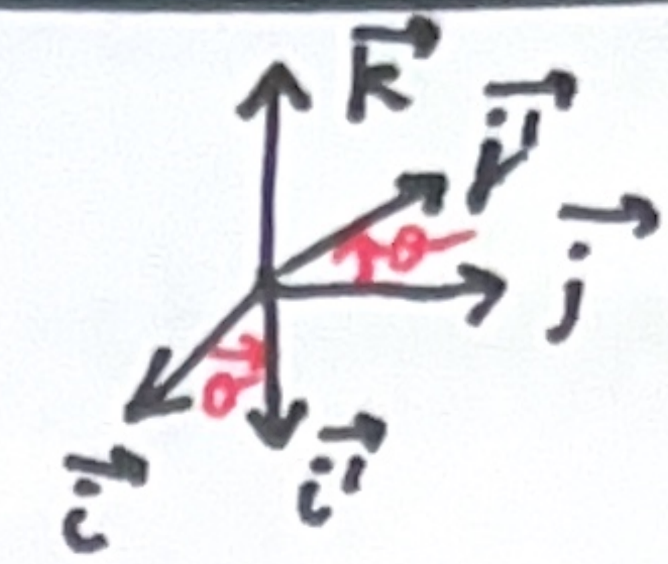
$$\left(\frac{d\sigma_{O/R'}(M)}{dt}\right)_{R'} = \vec{M_O}(\vec{F}) + \vec{M_O}(\vec{F_{ie}}) + \vec{M_O}(\vec{F_c})$$

avec $\vec{M_O}(\vec{F_i}) = \vec{OM} \wedge \vec{F_i}$

<u>démo</u> : repartir de $\sigma_{O/R'} = \vec{OM} \wedge m\vec{v_{M/R'}}$

et faire apparaître $\vec{a_{M/R'}}$.

• **Mvt de rotation entre R et R' :**



$\vec{\Omega}_{R'/R} = \dot{\theta}\,\vec{K}$

• **Formule de Varignon :**

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{U}$$

v "absolue"

L.C.V. $$\vec{v}_{M/R} = \underbrace{\vec{v}_{O'/R}}_{\text{vitesse de translation de } R'} + \underbrace{\vec{v}_{M/R'}}_{v_r} + \underbrace{\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}}_{\text{effet de rotation de } R'/R}$$

a "absolue"

L.C.A. $$\vec{a}_{M/R} = \overbrace{\vec{a}_{M/R'}}^{\vec{a_r}} + \overbrace{\vec{a}_{O'/R} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M}}^{\vec{a_e}}$$
$$+ \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R'}}_{a_c \text{ (coriolis)}}$$

PFD ref non gal : $$m\vec{a}_{M/R'} = \underbrace{\vec{F}}_{\text{résultante "forces vraies"}} + \overbrace{\vec{F_{ie}}}^{\text{force d'inertie d'entraînement}} + \underbrace{\vec{F_c}}_{\text{force d'inertie de Coriolis}}$$

avec

$$\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e}(M)$$
$$\vec{F_c} = -m\vec{a_c}(M)$$

Énergie dans un ref non galiléen

•

forces vraie   forces d'inertie d'entraînement

T.E.C. $\dfrac{dE_{c/R'}}{dt} = P_{/R'}(\vec{F}) + P_{/R'}(\vec{F_{ie}})$

comme $P = \dfrac{\delta W}{dt}$: $dE_{c/R'} = \delta W(\vec{F}) + \delta W(\vec{F_{ie}})$

rappel $P_{/R'}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v_{M/R'}}$.

contrairement à précédement on va préciser le repère dans lequel on prend $\vec{v}$.

• $dE_{c/R'} = \delta W(\vec{F}) + \delta W(\vec{F_e})$

$= \delta W_c + \delta W_{NC}$

$= -dE_p + \delta W_{NC}$

$\Rightarrow dE_{c/R'} + \underline{dE_p} = \delta W_{NC}$ regroupe les forces "vraies" et les forces d'inertie d'entraînement qui sont <u>conservatives</u>.

$\Rightarrow dE_{m/R'} = \delta W_{NC}$

systèmes de points materiels

R* ref barycentrique

- centre de masse : $\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{M}$ où $M = \sum_i m_i$

contient forces intérieures qui s'annulent + forces exterieures

- $M\vec{a_G} = \sum_i m_i \vec{a_i} = \sum_i \vec{F_i} = \overrightarrow{R_{ext}}$ (résultante)

preuve: écrire $\vec{a_G}$ comme $\dfrac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}$

- $\vec{p} = \sum_i \vec{p_i} = \sum_i m_i \vec{v_i}$

donc $\vec{p} = M\vec{v_G}$ et $\dfrac{dp}{dt} = M\vec{a_G} = \overrightarrow{R_{ext}}$
(à démontrer)

- $\vec{\sigma_0} = \sum \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v_i}$ $\Rightarrow \dfrac{d\vec{\sigma_0}}{dt} = \sum \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{i\,ext}$ $=$ "$\vec{M}_{0,ext}$".

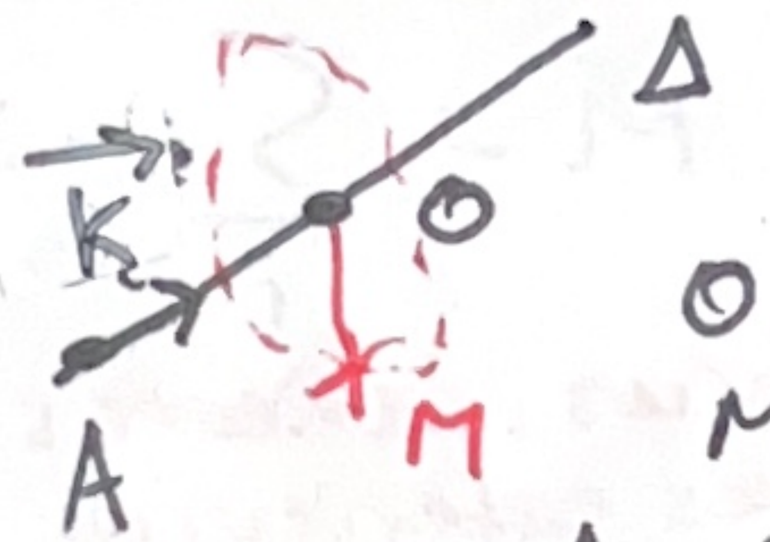
- $\vec{\sigma_G}^* = \vec{\sigma_0}^* = \vec{\sigma_G}$

- Koëning 1^e thm : $\vec{\sigma_O} = M\vec{OG} \wedge \vec{v_G} + \vec{\sigma_G}^*$

  2^e thm : $E_c = \frac{1}{2} M \vec{v_G}^2 + E_c^*$

- M en rotation autour d'un axe : $\vec{v}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$

  $= \omega \vec{k} \wedge \vec{OM}$



O est le proj de M sur Δ.
Δ est porté par $\vec{k}$

et même $= \omega \vec{k} \wedge \vec{AM}$
car $\vec{k} \wedge \vec{AO} = \vec{0}$.

- $E_c = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \sum P_{ext} + P_{int}$ (somme des résultantes)

  $\Rightarrow \Delta E_c = \sum W_{ext} + W_{ext}$

- $\Delta E_{p,int} = E_{p,int}(B) - E_{p,int}(A) = -W_{int}$ (pareil pour $E_{p\,ext}$)

et donc $E_p = E_{p,int} + E_{p,ext}$

$\Rightarrow E_m = E_c + E_{p,int} + E_{p,ext}$

- Rappels : $\Delta E_m = W_{NC}$ et $\Delta E_c = W$

  donc $E_m = E_c + E_p \Rightarrow W_{NC} = W + \Delta E_p$...