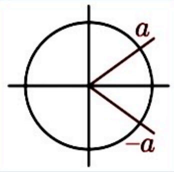
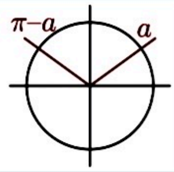
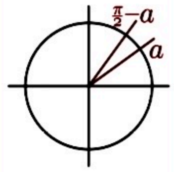
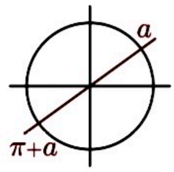
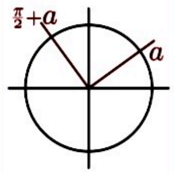
Grand Formulaire d'Analyse

Erwan Maugeri *(+sources)*

Relations Trigonométriques

$\cos(-a) = \cos(a)$ $\sin(-a) = -\sin(a)$ $\tan(-a) = -\tan(a)$		$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi - a) = \sin(a)$ $\tan(\pi - a) = -\tan(a)$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan a} = \cot(a)$		$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$ $\tan(\pi + a) = \tan(a)$	
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\frac{1}{\tan a} = -\cot(a)$		$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	

α	$-\theta$	$\theta + \pi$	$\pi - \theta$	$\theta + 2\pi$	$\frac{\pi}{2} - \theta$	$\frac{\pi}{2} + \theta$
$cos(\alpha)$	$cos(\theta)$	$-cos(\theta)$	$-cos(\theta)$	$cos(\theta)$	$sin(\theta)$	$-sin(\theta)$
$sin(\alpha)$	$-sin(\theta)$	$-sin(\theta)$	$sin(\theta)$	$sin(\theta)$	$cos(\theta)$	$cos(\theta)$

Formules d'addition

$$cos(a \pm b) = cos(a)cos(b) \mp sin(a)sin(b)$$

$$sin(a \pm b) = sin(a)cos(b) \pm cos(a)sin(b)$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}$$

Formules de duplication

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(a) \\ &= \frac{1 - \tan^2(a)}{1 + \tan^2(a)} \end{aligned}$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

Linéarisation (formules de Carnot)

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

$$\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\tan^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{1 + \cos(2a)}$$

Formules somme/produit

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\tan(a) + \tan(b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

$$\tan(a) - \tan(b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a)\cos(b)}$$

Formules d'Euler

$e^{ix} = cos(x) + isin(x)$

$$\cos x = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$\sin x = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Fonctions hyperboliques

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Valeurs moyennes
sur $[0,2\pi]$ et pour $n \in \mathbb{Z}$ on a:

$$\int_0^{2\pi} cos(nx)dx = 0 \quad (n \neq 0)$$

$$\int_0^{2\pi} sin(nx)dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} cos^2(nx)dx = \pi \quad (n \neq 0)$$

$$\int_0^{2\pi} sin^2(nx)dx = \pi$$

$$cos(ix) = cosh(x)\,,\ \sin(ix) = i\sinh(x)$$

Donc les moyennes valent:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} cos^2(nx)dx = \frac{1}{2} := < cos^2(nx) >_t$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sin^2(nx)dx = \frac{1}{2} := < sin^2(nx) >_t$$

Exponentielles complexes utiles pour Fourier

Pour tout $k, m, n \in \mathbb{Z}$:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{imx}e^{-inx}\,dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

Versions normalisées sur $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0$$

Développements limités usuels

Les développements limités ci-dessous sont valables quand **x tend vers 0** et uniquement dans ce cas.

Formule de Taylor-Young en 0. $f(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$.

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad \text{(et même } o(x^{2n+1}) \text{ et même } O(x^{2n+2})\text{)}$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{(et même } o(x^{2n+2}) \text{ ou } O(x^{2n+3})\text{)}$$

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad \text{(et même } o(x^{2n+1}) \text{ ou } O(x^{2n+2})\text{)}$$

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{(et même } o(x^{2n+2}) \text{ ou } O(x^{2n+3})\text{)}$$

$$\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad \text{(et même } o(x^{2n+2}) \text{ ou } O(x^{2n+3})\text{)}$$

$$\operatorname{Argth} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad \text{(et même } o(x^{2n+2}) \text{ ou } O(x^{2n+3})\text{)}$$

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n) \quad (\alpha \text{ réel donné})$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \underset{x\to 0}{=} 1 + 2x + 3x^2 + \ldots (n+1)x^n + o(x^n)$$

On obtient un développement de $\operatorname{Arcsin} x$ (resp. $\operatorname{argsh} x$) en intégrant un développement de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$ (resp. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}$).

Développements en série entière usuels

	Développement		Domaine de CVG	Rayon de CVG
e^{ax}	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\, x^n$		$a \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}$	∞
$\operatorname{sh} x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$		$x \in \mathbb{R}$	∞
$\operatorname{ch} x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n}$		$x \in \mathbb{R}$	∞
$\sin x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$		$x \in \mathbb{R}$	∞
$\cos x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$		$x \in \mathbb{R}$	∞
* $(1+x)^\alpha$	$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$	$\boxed{(\alpha \in \mathbb{R})}$	$x \in \left]-1\,;1\right[$	1
$\frac{1}{a-x}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \left]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\right[$	$\lvert a\rvert$
$\frac{1}{(a-x)^2}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \left]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\right[$	$\lvert a\rvert$
$\frac{1}{(a-x)^k}$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{C}_{n+k-1}^{k-1}}{a^{n+k}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \left]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\right[$	$\lvert a\rvert$
$\ln(1-x)$	$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^n$		$x \in \left[-1\,;1\right[$	1
$\ln(1+x)$	$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n$		$x \in \left]-1\,;1\right]$	1
$\sqrt{1+x}$	$= 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, x^n$		$x \in \left]-1\,;1\right[$	1
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, x^n$		$x \in \left]-1\,;1\right[$	1
$\operatorname{Arctan} x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$		$x \in \left[-1\,;1\right]$	1
$\operatorname{Argth} x$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1}$		$x \in \left]-1\,;1\right[$	1
$\operatorname{Arcsin} x$	$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$		$x \in \left]-1\,;1\right[$	1
$\operatorname{Argsh} x$	$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$		$x \in \left]-1\,;1\right[$	1

En vrac

Somme géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1)$$

Si $n \to \infty$ et $|q| < 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Somme arithmétique

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Identités remarquables non usuelles

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ *-> carrés de chaque terme*
-> double produit de chaque paire

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ *-> Structure importante: 1, 3, 3, 1 (triangle de Pascal)*

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ *-> signes alternés*

Tableau des primitives

Fonction f	Sa primitive F	Fonction f	Sa primitive F	Fonction f	Sa primitive F
$e^{\alpha x}$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$u'(x)u(x)$	$\frac{u(x)^2}{2}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$u'(x)u(x)^n$	$\frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}(x)$	$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}(x)$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\|u(x)\|)$

Définition de la limite et taux d'accroissement

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Identités Binomiales

Binôme de Newton, $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Triangle de Pascal

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Coefficients Binomiaux

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

-> *Résultats à connaître:* $\binom{n}{n-1} = n \ , \ \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \ , \ \binom{n}{n-1} = n$

-> *Formule de symétrie:* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

-> *Somme:* $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{1}$

Écriture compacte du DSE/DL de $(1+x)^\alpha$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$